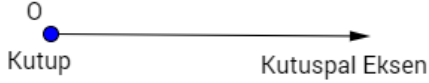


## KUTUPSAL (POLAR) KOORDİNATLAR

Düzlemde seçilen bir O başlangıç noktası ve bir yarı doğru olan oluşan sistemdir.

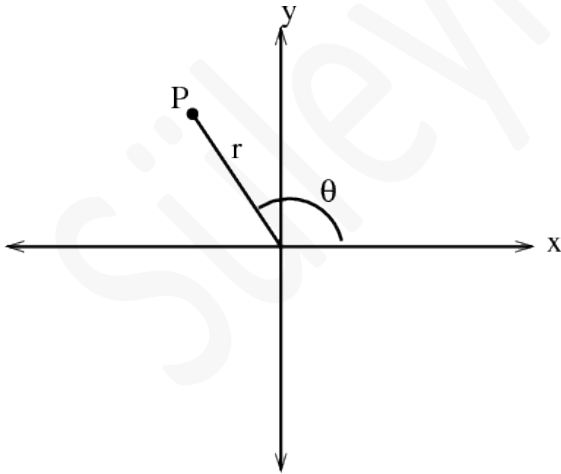


**Not:** Kolaylık olması açısından Kartezyen Koordinat Sisteminin orijini başlangıç, x ekseninin pozitif kısmını da kutupsal eksen olarak alacağız.

### Düzlemde Bir Noktanın Kutupsal Gösterimi:

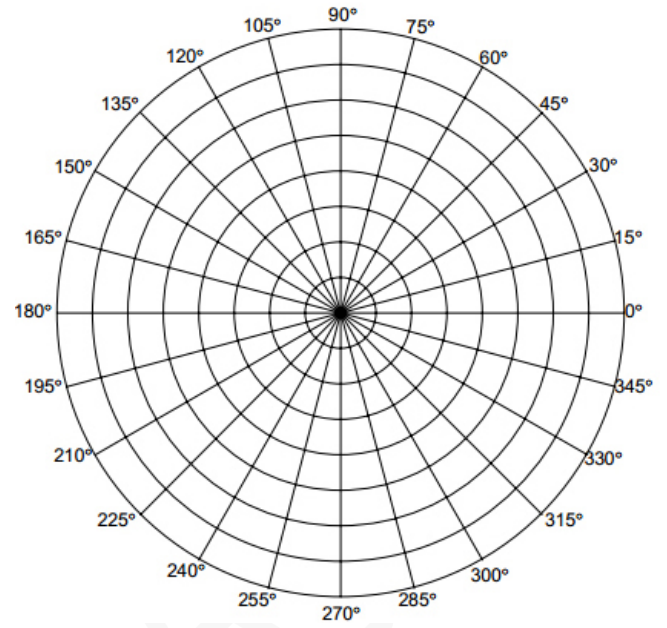
Düzlemdeki bir noktanın yeri **Kartezyen Koordinat Sisteminde** o noktanın x ve y eksenlerine uzaklığı ile belirlenirken, **Kutupsal Koordinat Sisteminde** ise o noktanın **Kutup Noktasına** (ki artık orijin olarak anacağız) **uzaklığı**  $r$  ve **Kutupsal Eksen** ile (ki artık x eksenini olarak anacağız) pozitif yönde yaptığı **açı**  $\theta$  ile belirleriz.

$$P(x, y) \leftrightarrow P(r, \theta)$$



**Ör:** Kutupsal koordinatları ile verilen  $A\left(3, \frac{\pi}{4}\right), B\left(5, -\frac{\pi}{3}\right), C\left(-7, \frac{\pi}{12}\right), D\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  ve  $E\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$  noktalarını aşağıda  $15^\circ$  lik

açılara bölünmüş kutupsal ızgara sisteminde gösteriniz.



### Uyarı!

Örnekten de anlaşılacağı üzere bir noktanın birden fazla gösterimi vardır.

**Ör:**  $P = \left\{ \left( r, \frac{\pi}{3} \right) : r > 3 \right\}$  kümesini düzlemde gösteriniz.

**Ör:**  $P = \left\{ (2, \theta) : 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$  kümesini düzlemde gösteriniz.

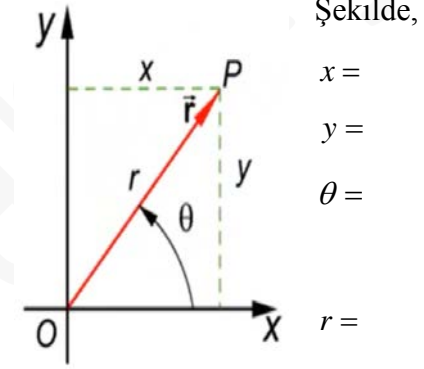
**Ör:**  $P = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r < 2, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

kümesini düzlemde gösteriniz.

**Ödev:**

- Kutupsal koordinatları ile verilen  $A\left(-4, \frac{3\pi}{4}\right), B\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right), C(1, \pi), D(0, 5\pi)$  ve  $E\left(-2, \frac{17\pi}{3}\right)$  noktalarını kutupsal koordinat sisteminde gösteriniz ve  $|BE|$  ile  $|AC|$  uzunluklarını bulunuz.
- $P = \left\{ (r, \theta) : \frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$  kümesini düzlemde gösteriniz.
- $P = \left\{ (r, \theta) : r > 2, \frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$  kümesini düzlemde gösteriniz.

### Kartezyen Koordinatların Kutupsal Koordinatlara Dönüştürülmesi



**Not:**  $\theta$  açısının bulunduğu bölgeyi belirlemek için

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

bağıntılarından faydalanılır.

**Ör:** Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Kutupsal Koordinatlar	Kartezyen Koordinatlar
$\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$	
$\left(-6, \frac{\pi}{4}\right)$	
	(3, 4)
	$(2\sqrt{3}, -6)$

### Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

Kartezyen denklemler  $F(x, y) = 0$  iken Kutupsal denklemler ise  $F(r, \theta) = 0$  şeklindedir. Bu iki sistem arasında dönüşüm yapılırken aşağıda verilen özdeşlikler kullanılır.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\theta \text{ bölgeye göre belirlenir})$$

**Ör:** Aşağıda Kartezyen formda verilen denklemleri kutupsal formda yazınız.

- $x^2 + y^2 = 4$
- $x = 1$
- $y = -2$
- $x^2 - y^2 = 1$
- $y - 3x = 0$

**Ör:** Aşağıda Kutupsal formda verilen denklemleri Kartezyen formda yazınız.

- $r = 4 \cos \theta$
- $r = 6 \sin \theta - 8 \cos \theta$
- $\tan \theta = 3$

**Ör:** Aşağıda verilen denklemlerin grafiklerini tahmin ederek çiziniz.

a)  $r = 1$

b) i)  $-2 < r \leq 3$ , ii)  $2 < r \leq 3$

c)  $\theta = \frac{\pi}{6}$

d)  $-2 < r \leq 5$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{3}$

e)  $r = \cos \theta$

f)  $r = 2 \sin \theta$

g)  $r^2 \cos \theta \sin \theta = 4$

**Ödev:**

1. Aşağıda kutupsal formda verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

a.  $r = -3$

b.  $\theta = -\frac{\pi}{2}$

c.  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

d.  $r = 4 \sin \theta$

e.  $\tan \theta = 1$

2.  $x^2 + y^2 = 16 \left( \frac{y}{x} \right)^2$  Kartezyen

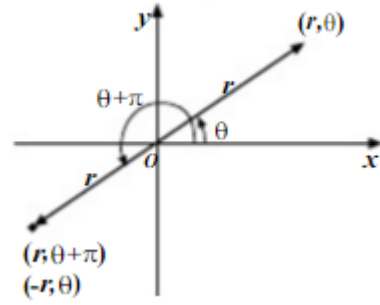
formda verilen denklemini, polar formda yazınız.

## Kutupsal Formda Verilen Bazı Özel Denklemler ve Grafikleri

Bu konuya girmeden önce Simetri konusuna değinmekte fayda var çünkü bir grafiğin neye göre simetrik olduğu bize grafik hakkında bilgi verebilir.

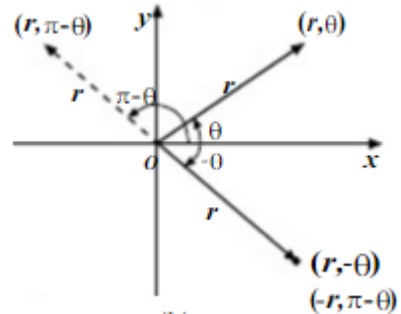
**Simetri:**  $(r, \theta)$  grafik üzerinde bir nokta olsun.

- a.  $(-r, \theta)$  veya  $(r, \pi + \theta)$  noktaları da grafik üzerinde ise grafik orijine göre simetriktir.



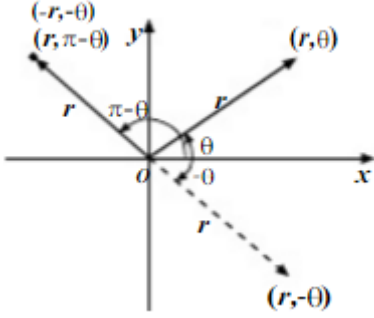
**Ör:**  $r^2 \cos \theta \sin \theta = 1$  eğrisinin orijine göre simetrik olduğunu gösteriniz.

- b.  $(r, -\theta)$  veya  $(-r, \pi - \theta)$  noktaları da grafik üzerinde ise grafik x-eksenine göre simetriktir.



**Ör:**  $r = 1 + \cos \theta$  eğrisinin x-eksenine göre simetrik olduğunu gösteriniz.

- c.  $(r, \pi - \theta)$  veya  $(-r, -\theta)$  noktaları da grafik üzerinde ise grafik x-eksenine göre simetriktir.



**Ör:**  $r = 1 + \sin \theta$  eğrisinin y-eksenine göre simetrik olduğunu gösteriniz.

**Arşimet Spirali:**  $a \in R^+$  olmak üzere denklemi

$$r = a\theta$$

şeklinde olan eğilerdir.

**Ör:**  $r = \theta$  eğrisinin grafiğini çiziniz.

**Kardoidler:** Grafikleri kalp şeklinde olan eğilerdir.  $a \in R^+$  olmak üzere denklemi

$$r = a(\mp 1 \mp \cos \theta)$$

şeklindedir.

- Kutup eksenine göre simetriktir.
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$  aralığında çizilir.

**Ör:**  $r = 2(1 + \cos \theta)$  eğrisini çiziniz.

**Not:**  $r = a(\mp 1 \mp \sin \theta)$  eğrisinin grafiği

$r = a(\mp 1 \mp \cos \theta)$  eğrisinin grafiğinin  $\frac{\pi}{2}$  radyan döndürülmüş halidir.

**Ör:**  $r = 2(1 - \sin \theta)$  eğrisini çiziniz.

**Limaçonlar:**  $a, b \in R^+$  olmak üzere denklemleri

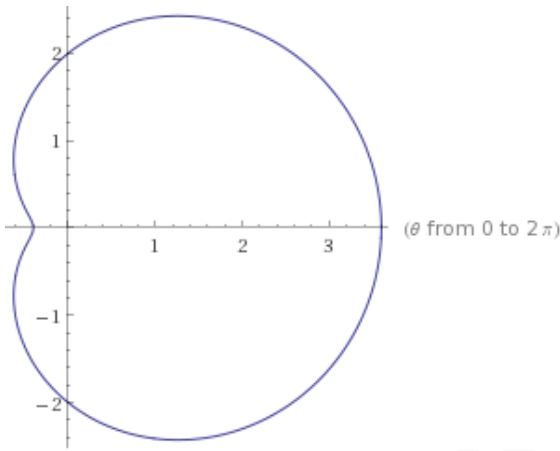
$$r = a(1 + b \cos \theta)$$

şeklinde olan eğrilerdir.

- Kutup eksenine göre simetriktir.
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$  aralığında çizilir.

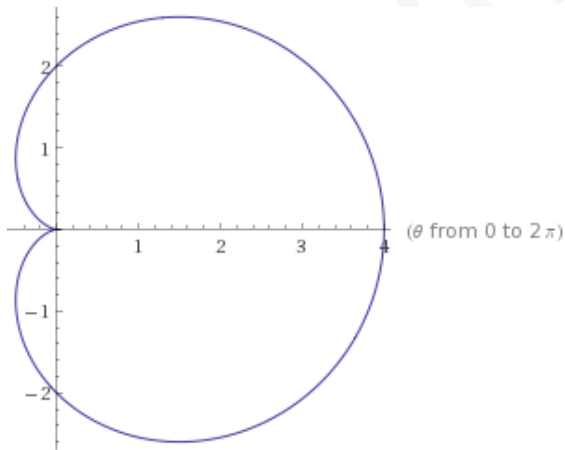
**Aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.**

**i.**



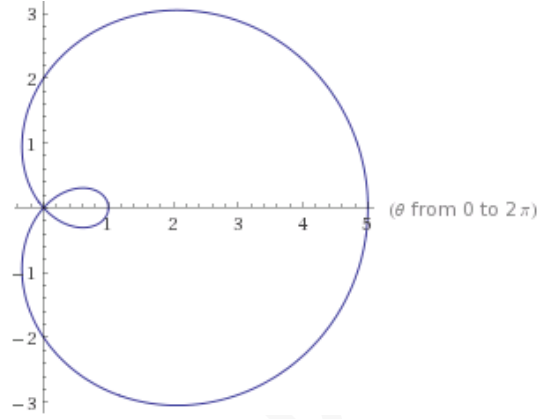
$$r = 2(1 + 0,8 \cos \theta), 0 < b < 1$$

**ii.**



$$r = 2(1 + \cos \theta), b = 1$$

**iii.**

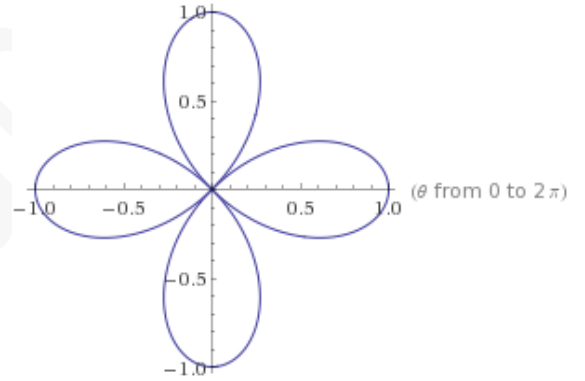


$$r = 2(1 + 1,5 \cos \theta), b > 1$$

**Yaprak Eğrileri:**

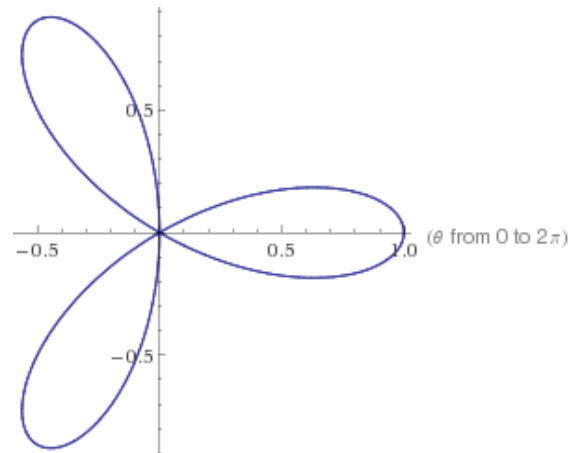
**1.  $r = a \cos(b\theta)$ , ( $a, b \in R^+$ )**

**a.**



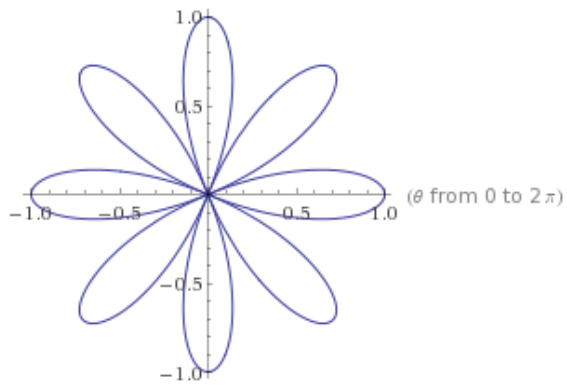
$$r = \cos(2\theta)$$

**b.**

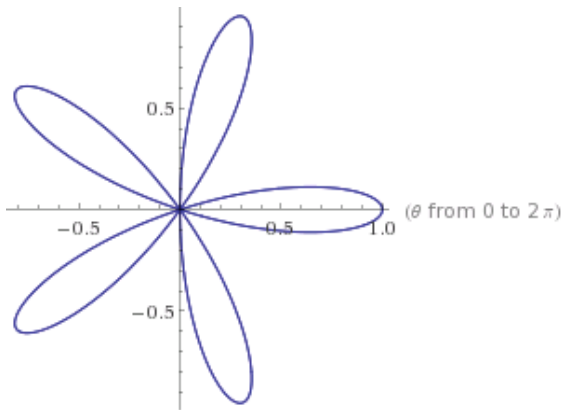


$$r = \cos(3\theta)$$

c.



$$r = \cos(4\theta)$$

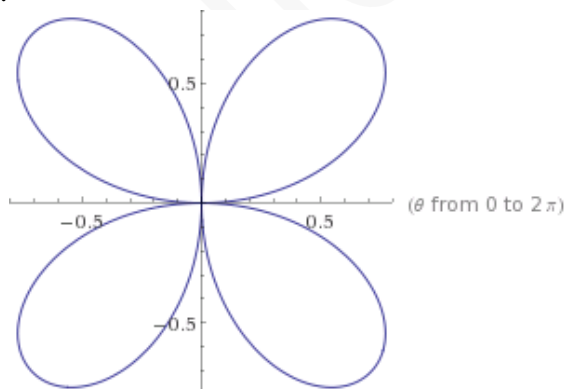


d.

$$r = \cos(5\theta)$$

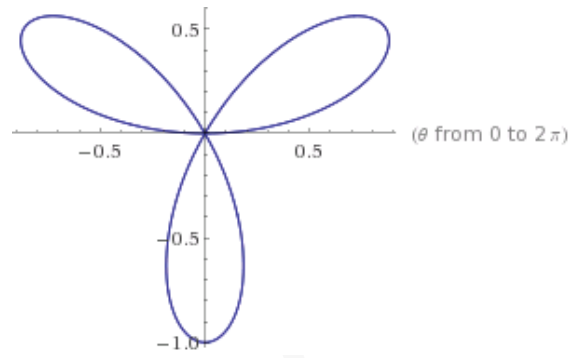
2.  $r = a \sin(b\theta)$ ,  $(a, b \in \mathbb{R}^+)$

a.

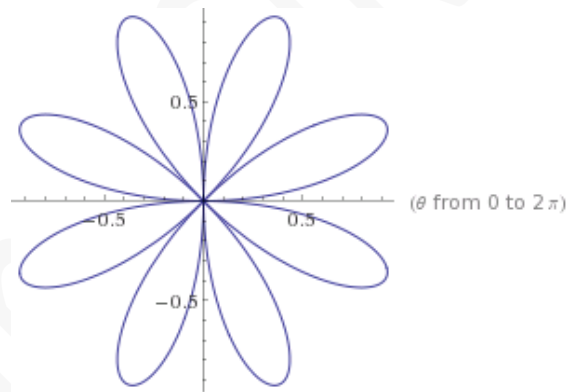


$$r = \sin(2\theta)$$

b.



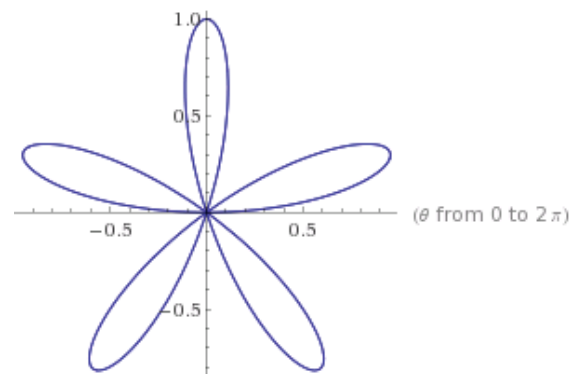
$$r = \sin(3\theta)$$



c.

$$r = \sin(4\theta)$$

d.



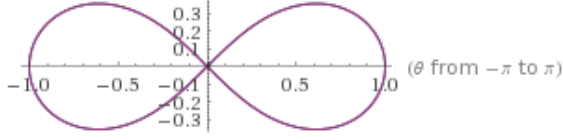
$$r = \sin(5\theta)$$



### Lamniskatlar:

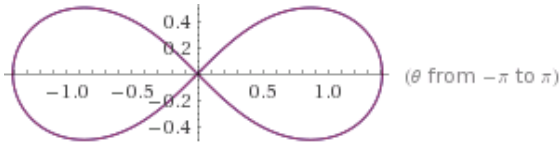
Aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.

1.



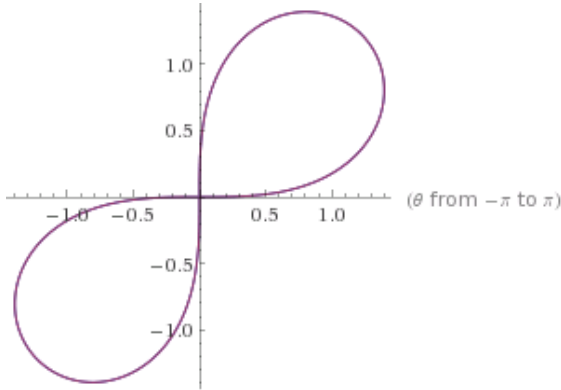
$$r^2 = \cos(2\theta), \quad (a \in \mathbb{R}^+)$$

2.



$$r^2 = 2\cos(2\theta), \quad (a \in \mathbb{R}^+)$$

3.



$$r^2 = 3\sin(2\theta), \quad (a \in \mathbb{R}^+)$$

**Ödev:** Polar formda verilen aşağıdaki denklemlerin eğrilerini çiziniz.

a.  $r = 3 \sin \theta$

b.  $r = 4 \cos^2 \theta$

c.  $r = \sin 2\theta$

d.  $r = 1 + \cos \theta$

e.  $r = 1 + 3 \sin \theta$

f.  $r = 3 + \sin \theta$

g.  $r = 3$

h.  $r = -4$

i.  $\theta = \frac{\pi}{6}$

i.  $\theta = -3\pi$

j.  $r = \frac{\theta}{2}$

k.  $r = 3 \cos \theta$

**Not:** Grafik çizimlerinde yararlanılan web uygulaması.

<http://www.wolframalpha.com/input/?i=r%3Dtheta>